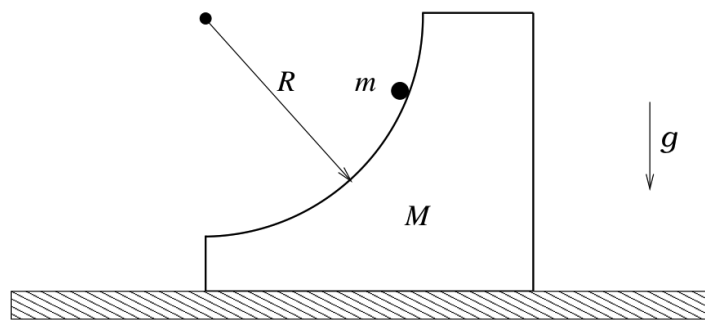


Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 1ºP/2013 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios I - teste na sexta, 10/05

- Um pêndulo elástico consiste numa massa m capaz de oscilar num plano vertical suspensa por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l .
 - Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange.
 - Interprete o significado físico dos termos que aparecem nestas equações. Verifique ainda se seus resultados se reduzem apropriadamente aos casos de um pêndulo simples e/ou uma mola simples, caso se tome os limites adequados.
- Uma partícula de massa m desliza sem atrito ao longo de uma cunha de massa M e formato semicircular de raio R . A cunha, por sua vez, escorrega sem atrito ao longo de um plano horizontal. Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a lagrangiana e as equações de movimento do sistema.



- Na eletrodinâmica de Weber, a força entre duas cargas elétricas puntiformes em movimento é dirigida ao longo da linha que as une e tem magnitude

$$F = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right\},$$

onde r é a distância entre as cargas. Determine o potencial generalizado $U(r, \dot{r})$ associado a esta força.

- Considere a chamada máquina de Atwood oscilante (v. fig) - (M só se move verticalmente). Usando as coordenadas indicadas na figura, mostre que (a menos de uma constante que pode ser descartada porque não afeta as equações de Lagrange) a lagrangiana é

$$L = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - gr(M - m\cos\theta)$$

e escreva as equações de Lagrange.

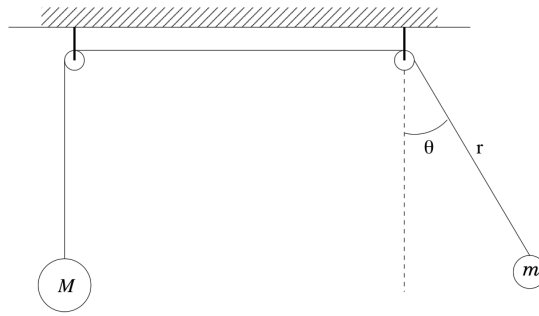
- Considere o Exemplo 1.5.1 do livro-texto (página 26) no caso em que todas as massas são iguais ($m_1 = m_2 = m_3 = m$) e o sistema é liberado a partir do repouso com $x_2 = 0$ e $x_3 = l$, onde l é o comprimento natural da mola.

(a) Resolva as equações de movimento do sistema que estão na página 27 do livro-texto e prove que

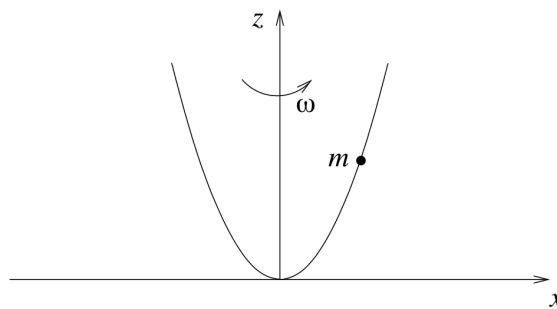
$$x_2(t) = \frac{2mg}{9k}(\cos\omega t - 1) + \frac{gt^2}{6}, \omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

donde $\dot{x}_2(t) = (g/3\omega)(\omega t - \sin\omega t)$.

(b) Prove que $\dot{x}_2(t) > 0$ para todo $t > 0$ e conclua que o fio sempre permanece esticado. Isto justifica, a posteriori, o uso das equações de movimento da página 27.



6. Uma conta de massa m está restrita a mover-se ao longo de um arame rígido e liso. O arame está num plano vertical, num campo gravitacional uniforme $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$, e tem a forma de uma parábola cuja equação é $z = x^2/2R$, onde R é uma constante positiva. Se o arame é posto a girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical z , obtenha a lagrangiana e as equações de Lagrange para a conta.



7. Utilizando a função de dissipação de Rayleigh, obtenha as equações de movimento para um pêndulo duplo (exemplo 1.2.4, p. 11 e 1.5.3, p.28) no caso em que levamos também em conta forças de dissipação $\mathbf{F}_i = -b\mathbf{v}_i$, linearmente proporcionais à velocidade de cada massa.